VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

FOURIEROVA ŘADA A JEJÍ VLASTNOSTI

THE FOURIER SERIES AND ITS PROPERTIES

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

PAVLA SLADKÁ

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

Ing. PAVEL ŠTARHA, Ph.D.

BRNO 2008

Licenční smlouva
poskytovaná k výkonu práva užít školní dílo
uzavřená mezi smluvními stranami:

1. Paní

Jméno a příjmení:	Pavla Sladká
Bytem:	Nádražní 1260, 664 34, Kuřim
Narozena (datum a místo):	3. 12. 1985, Brno

(dále jen autor)

a

2. Vysoké učení technické v Brně

Fakulta strojního inženýrství
se sídlem Technická 2896/2, 61669, Brno - Královo Pole
jejímž jménem jedná na základě písemného pověření děkanem fakulty:
...

(dále jen nabyvatel)

Čl. 1
Specifikace školního díla

1. Předmětem této smlouvy je vysokoškolská kvalifikační práce (VŠKP):

   - ☐ disertační práce
   - ☐ diplomová práce
   - ☒ bakalářská práce
   - ☐ jiná práce, jejíž druh je specifikován jako ....

   (dále jen VŠKP nebo dílo)

Název VŠKP:	Fourierova řada a její vlastnosti
Vedoucí/ školitel VŠKP:	Ing. Pavel Štarha, Ph.D.
Ústav:	Ústav matematiky
Datum obhajoby VŠKP:	18. 6. 2008

   VŠKP odevzdal autor nabyvateli v[1]:

   - ☐ tištěné formě — počet exemplářů 2
   - ☐ elektronické formě — počet exemplářů 1

2. Autor prohlašuje, že vytvořil samostatnou vlastní tvůrčí činností dílo shora popsané a specifikované. Autor dále prohlašuje, že při zpracovávání díla se sám nedostal do rozporu s autorským zákonem a předpisy souvisejícími a že je dílo dílem původním.

3. Dílo je chráněno jako dílo dle autorského zákona v platném znění.

4. Autor potvrzuje, že listinná a elektronická verze díla je identická.

---

[1] hodící se zaškrtněte

Čl. 2
Udělení licenčního oprávnění

1. Autor touto smlouvou poskytuje nabyvateli oprávnění (licenci) k výkonu práva uvedené dílo nevýdělečně užít, archivovat a zpřístupnit ke studijním, výukovým a výzkumným účelům včetně pořizování výpisů, opisů a rozmnoženin.
2. Licence je poskytována celosvětově, pro celou dobu trvání autorských a majetkových práv k dílu.
3. Autor souhlasí se zveřejněním díla v databázi přístupné v mezinárodní síti

   - ☐ ihned po uzavření této smlouvy
   - ☐ 1 rok po uzavření této smlouvy
   - ☐ 3 roky po uzavření této smlouvy
   - ☐ 5 let po uzavření této smlouvy
   - ☐ 10 let po uzavření této smlouvy

   (z důvodu utajení v něm obsažených informací)
4. Nevýdělečné zveřejňování díla nabyvatelem v souladu s ustanovením §47b zákona č. 111/1998 Sb., v platném znění, nevyžaduje licenci a nabyvatel je k němu povinen a oprávněn ze zákona.

Čl. 3
Závěrečná ustanovení

1. Smlouva je sepsána ve třech vyhotoveních s platností originálu, přičemž po jednom vyhotovení obdrží autor a nabyvatel, další vyhotovení je vloženo do VŠKP.
2. Vztahy mezi smluvními stranami vzniklé a neupravené touto smlouvou se řídí autorským zákonem, občanským zákoníkem, vysokoškolským zákonem, zákonem o archivnictví, v platném znění a popř. dalšími právními předpisy.
3. Licenční smlouva byla uzavřena na základě svobodné a pravé vůle smluvních stran, s plným porozuměním jejímu textu i důsledkům, nikoliv v tísni a za nápadně nevýhodných podmínek.
4. Licenční smlouva nabývá platnosti a účinnosti dnem jejího podpisu oběma smluvními stranami.

V Brně dne:

Nabyvatel   Autor

Abstrakt
Funkční řady, a zejména pak řady Fourierovy, jsou důležitým matematickým aparátem využívaným v rozmanitých technických oborech. Velmi podstatnou skupinu mezi funkčními řadami tvoří mocninné řady, které se pro svoji jednoduchost aplikují při řešení nejrůznějších úloh. Rozvojem funkce do mocninné řady, tj. Taylorovou řadou, rozumíme nalezení mocninné řady, jejímž součtem je právě daná funkce. Tyto rozvoje jsou vhodné především v tom smyslu, že řadu operací (vyčíslení funkčních hodnot, limit, derivací a integrálů) lze provést pro tyto rozvoje snadněji, než pro funkce samotné.

Fourierovy řady se používají při studiu jevů s periodickým charakterem. Výhodou těchto řad je skutečnost, že požadavky kladené na jejich konvergenci k rozvíjené funkci jsou slabší než v případě rozvojů do Taylorových řad. Rovněž výpočet koeficientů může být jednodušší záležitostí než u řad Taylorových. Rozvojů funkcí do Fourierových řad se s úspěchem používá především k hledání (periodických) řešení obyčejných a parciálních diferenciálních rovnic. Tuto metodu řešení nazýváme Fourierovou metodou či Fourierovou metodou separací proměnných pro způsob konstrukce speciálních funkcí.

Summary
The functional series, and especially the Fourier series, are an important mathematical apparatus exploited in the various technical branches. A very essential group of the functional series are the power series, which are applied because of their simplicity for solving of the many problems. An expansion of the function to the power series, i. e. the Taylor expansion, whose sum is the expanded function. These expansions are suitable for evaluation of operations, such as calculation of functional values, limits, derivatives and integrals. Calculations of these expansions are easier than of the functions theirself.

The Fourier series are used for studies of events with periodic character. An advantage of the Fourier series is the fact, that the requirements for convergency are weaker than in the case of the Taylor expansions. Likewise, calculation of the coefficients can be more simple than in the Taylor expansions. Expansions of functions to the Fourier series are used especially for solving ordinary and partial differential equations. This method of solving is known as the Fourier method or the Fourier method of variable separation.

Klíčová slova
Řada, Fourierova řada, Fourierovy koeficienty, aplikace

Keywords
Series, the Fourier series, the Fourier coefficients, application

SLADKÁ, P. *Fourierova řada a její vlastnosti.* Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2008. 31 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Pavel Štarha, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Fourierova řada a její vlastnosti* vypracovala samostatně pod vedením Ing. Pavla Štarhy, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Pavla Sladká

Děkuji svému školiteli Ing. Pavlu Štarhovi, Ph.D. za vedení mé bakalářské práce.

Pavla Sladká

Obsah

1 Úvod

Cílem této práce je nastínit teorii funkčních řad a následně se soustředit na problematiku řad Fourierových. Funkční řady jsou řady, jejichž členy jsou reálné funkce. Nejjednodušším typem funkčních řad jsou řady mocninné. Rozvoje funkcí v mocninné řady, tj. Taylorovy řady, jsou často využívány například ke snadnějšímu vyčíslení operací jako jsou integrace, derivace či výpočtu funkční hodnoty. Nejobsáhlejší část práce je věnována Fourierovým řadám, a to především teorii a aplikacím. Fourierova řada je speciálním případem funkční řady – jedná se o rozvoj funkce do řad sinů a kosinů.

Práce je určena čtenáři, jež ovládá základy diferenciálního a integrálního počtu.

Samotný obsah práce je rozčleněn do pěti kapitol. Úvodem je v několika odstavcích stručně popsán život J.-B. J. de Fouriera, autora mnoha teorií, které jsou dodnes aplikovány v nejrůznějších technických oborech. Druhá kapitola slouží k obecnému popisu funkčních řad a jejich vlastností. Následující kapitola je zaměřena na řady mocninné. V této části je kladen důraz na otázku konvergence těchto řad a dále na navazující téma derivovaní a integrování mocninných řad člen po členu. Třetí kapitola obsahuje text věnovaný Taylorovým řadám, v němž je uveden přehled Taylorových rozvojů elementárních funkcí získaných přímou a nepřímou metodou. Předposlední kapitola s názvem Fourierovy řady je rozdělena do několika důležitých podkapitol zaměřených především na základní pojmy, bodovou a stejnoměrnou konvergenci a řešené příklady. Pro názornost jsou jednotlivé příklady doplněny o vykreslené grafy vytvořené v online programu METAPOST. V závěru je uvedeno krátké shrnutí obsahu a cílů práce a v neposlední řadě je přiložen seznam použité literatury, použitých symbolů a zkratek.

1.1 Krátce z historie

Jean-Baptiste Joseph de Fourier[1] (21. březen 1768 – 16. květen 1830) byl francouzský matematik a fyzik, který se nejvíce proslavil zkoumáním *Fourierových řad* a jejich aplikací k problémům toků tepla, objevitel skleníkového efektu (1824). Narodil se v Auxerre jako syn krejčího. V devíti letech ztratil oba rodiče. Začal chodit do vojenské školy při benediktinském klášteře. V roce 1789 přijel do Paříže, aby představil svou práci o číselném řešení rovnice libovolného stupně, ta se však během revoluce ztratila. Fourier se vrátil do Auxerre a přednášel ve škole, na níž sám studoval. V roce 1794 přestoupil na École Normale Supérieure, školu založenou Konventem, jejíž smyslem byla příprava učitelů. Školu brzy zavřeli, přesto na sebe Fourier stačil upozornit takové velikány jako byli Lagrange, Laplace a Monge. V letech 1795–1798 přednášel na École Polytechnique.

Spolu s dánským fyzikem H. Oerstedem (1777–1851) sestavili z bismutových a antimonových destiček zdroj napětí podobný Voltovu sloupu a zkoumali termoelektřinu. Ve spisu

[1] Veškeré historické údaje jsou čerpány z [7], [8].

Theorie analytique de la chaleur (Analytická teorie tepla, 1822) matematicky zpracoval teorii vedení tepla a tím přispěl k rozvoji parních strojů. Vyslovil základní zákon vedení tepla. V uvedené práci položil základy *Fourierovy metody řešení parciálních diferenciálních rovnic* s předem danými okrajovými podmínkami, které se úspěšně uplatňují ve fyzice a v technických vědách. I když nejsou výhradně Fourierovým objevem, nesou jeho jméno, jelikož byl první, kdo ukázal, že jsou silným matematickým nástrojem v matematické fyzice i v matematické analýze. Sestavil trigonometrické řady funkcí definovaných na intervalu $(-\pi, \pi)$ a v tomto intervalu integrovatelných. S oběma těmito rozvoji souvisí tzv. *Fourierovy koeficienty.*

Pro neperiodické funkce integrovatelné na všech reálných číslech zavedl tzv. *Fourierův integrál*, který má v tomto případě podobný úkol jako Fourierova řada pro periodické funkce. Teorii funkcí obohatil *Fourierovou transformací*, která je zobrazením přiřazující funkci f definované v $\mathbb{R}$ funkci f', která je jejím Fourierovým obrazem, a tak výrazně přispěl k objasnění pojmu funkce. Zabýval se i statistikou a teorií pravděpodobnosti. Stimuloval práce, které vedly k trigonometrii řad. Ta později přivedla německého matematika G. Cantora (1845–1918) k teorii množin.

Fourierem vytvořené matematické metody patří ke klasickým pomocným prostředkům fyziky. Platí to především o vyjádření libovolných funkcí řadami nebo integrály sinusových funkcí. V teorii kteréhokoli vlnivého procesu, ať zvuku, povrchového vlnění na kapalinách nebo elektromagnetických kmitů, má důležitý význam Fourierovo rozložení v čistě sinusové kmity, a to tím spíše, že každý akustický rezonátor a každý optický spektrální přístroj provádí toto rozložení automaticky (až k jistému stupni). Fourierovo dílo je vzorným příkladem toho, jak požadavky fyziky vyvolaly významný pokrok matematiky.

2 Funkční řady

V této kapitole se budeme zabývat řadami, jejíž členy jsou realné funkce, tedy funkčními řadami. Podrobněji je tato problematika zpracována například v [4], [6].

2.1 Definice a základní pojmy, obor konvergence

Definice 1. Nechť v intervalu I je definována posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. *Funkční řadou* rozumíme výraz ve tvaru

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots . \tag{2.1}$$

Dosadíme-li za x určité číslo $x_0 \in I$, obdržíme z funkční řady (2.1) číselnou řadu ve tvaru

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0) = f_1(x_0) + f_2(x_0) + \cdots + f_n(x_0) + \cdots . \tag{2.2}$$

Konverguje-li číselná řada (2.2), řekneme, že funkční řada (2.1) konverguje pro $x = x_0$.

Definice 2. Nechť $I^\star \subset I$ značí množinu všech čísel x z množiny I, pro která funkční řada (2.1) konverguje. Množinu $I^\star$ nazýváme *oborem konvergence* funkční řady (2.1).

Při určování oboru konvergence $I^\star$ často s výhodou užíváme limitního podílového nebo odmocninového kritéria.

Poznámka. Je dána nekonečná číselná řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots . \tag{2.3}$$

Limitní podílové kritérium (LPK)

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = L$$

- $L > 1 \Rightarrow$ řada (2.3) konverguje
- $L < 1 \Rightarrow$ řada (2.3) diverguje
- $L = 1 \Rightarrow$ o konvergenci či divergenci řady (2.3) nelze na základě tohoto kritéria rozhodnout.

Limitní odmocninové kritérium (LOK)

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = L,$$

pak platí závěry limitního podílového kritéria.

■ **Příklad 2.1.** Určete obor konvergence $I^\star$ řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{x}{2^k} = \sin\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{4} + \sin\frac{x}{8} + \cdots, \qquad I = \mathbb{R}.$$

Řešení. LPK:

$$L = \lim_{k\to\infty} \frac{\left|\sin\frac{x}{2^{k+1}}\right|}{\left|\sin\frac{x}{2^k}\right|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\left|\sin\frac{x}{2^{k+1}}\right|}{\left|\sin 2\frac{x}{2^{k+1}}\right|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\left|\sin\frac{x}{2^{k+1}}\right|}{2\left|\sin\frac{x}{2^{k+1}}\right|\left|\cos\frac{x}{2^{k+1}}\right|} =$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\left|\cos\frac{x}{2^{k+1}}\right|} = \frac{1}{2} < 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Podle limitního podílového kritéria jsme určili obor konvergence $I^\star = I = \mathbb{R}$.

■ **Příklad 2.2.** Určete obor konvergence $I^\star$ řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln^k x}{k} = \ln x + \frac{\ln^2 x}{2} + \frac{\ln^3 x}{3} + \cdots, \qquad I = (0,\infty).$$

Řešení. LOK:

$$L = \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|f_k(x)|} = \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{|\ln^k x|}{k}} = \lim_{k\to\infty}|\ln x|\frac{1}{\sqrt[k]{k}} = |\ln x|.$$

Podle limitního odmocninového kritéria řada konverguje pro $|\ln x| < 1$ a nekonverguje pro $|\ln x| > 1$. Dosazením hodnoty $\ln x = 1$ dostáváme divergentní harmonickou řadu a dosazením hodnoty $\ln x = -1$ pak konvergentní Leibnitzovu řadu. Vyšetřovaná řada tedy konverguje, právě když $\ln x \in \langle -1, 1)$. Protože $\ln\frac{1}{\mathrm{e}} = -1$, $\ln \mathrm{e} = 1$, je obor konvergence tvaru $I^\star = \langle \mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e})$.

Definice 3. Funkci $s_n(x)$ tvaru

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) \tag{2.4}$$

nazýváme *n-tým částečným součtem* funkční řady (2.1). Výraz

$$R_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{n+k}(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + f_{n+3}(x) + \cdots \tag{2.5}$$

nazýváme *n-tým zbytkem* řady (2.1). *Součtem* funkční řady (2.1) rozumíme funkci

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x), \tag{2.6}$$

která je definována na množině $I^\star$ (tj. je definována pro všechna x, ve kterých existuje konečná limita $\lim_{n\to\infty} s_n(x)$). Potom píšeme

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x), \quad x \in I^\star. \tag{2.7}$$

Poznámka. Součtem nekonečné řady funkcí je tedy opět funkce. Podotkněme však, že tento součet nemusí být definován na celém intervalu I (kde jsou definováni jednotliví sčítanci), ale obecně pouze na nějaké jeho podmnožině $I^\star$.

Jednou z nejpodstatnějších otázek v teorii funkčních řad je problém, nakolik se některé základní vlastnosti konečných součtů přenášejí na součty nekonečné. Především nás bude zajímat zachování tří následujících vlastností známých z diferenciálního počtu:

1. *Jsou-li funkce $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ spojité na I, potom je na I spojitý také jejich součet.*
2. *Integrál ze součtu funkcí je roven součtu integrálů těchto funkcí:*

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_a^b f_k(x) \, \mathrm{d}x \right)$$

3. *Derivace součtu je rovna součtu derivací:*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right)' = \sum_{k=1}^{n} f_k'(x)$$

I když je přirozené se domnívat, že tyto zmíněné vlastnosti platí, ve skutečnosti tomu tak obecně není.

■ **Příklad 2.3.** Určete obor konvergence funkční řady:

$$x + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \cdots$$

a ukažme, že tato řada konverguje na tomto oboru k nespojité funkci.
Řešení. Členy této řady jsou funkce $f_1(x) = x, f_2(x) = x^2 - x, f_3(x) = x^3 - x^2, \ldots$, tedy funkce spojité na $(-\infty, \infty)$. Nejprve určíme obor konvergence $I^\star$ této funkční posloupnosti. Pro její n-tý částečný součet platí

$$s_n(x) = x + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \cdots + (x^n - x^{n-1}) = x^n$$

Pro $x > 1$ je $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = +\infty$, kdežto pro $x < -1$ tato limita neexistuje. Dále pak $s_n(1) = 1 \,\forall n$, tj. $\lim_{n\to\infty} s_n(1) = 1$ a $\lim_{n\to\infty} s_n(-1)$ neexistuje. Je-li $x \in (-1, 1)$, potom $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = 0$. Došli jsme tedy k závěru, že konvergenční obor $I^\star$ posloupnosti funkcí $s_n(x) = x^n$ je $I^\star = (-1, 1\rangle$, přičemž limitní funkce $s(x)$ je tvaru:

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1, 1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Zjistili jsme tedy, že řada spojitých funkcí $f_n(x)$ konverguje v intervalu $I^\star = (-1, 1\rangle$ k nespojité funkci $s(x)$, která má bod nespojitosti v bodě $x = 1$.

K zachování výše uvedených vlastností proto zavedeme silnější typ konvergence funkční řady, tzv. *stejnoměrnou konvergenci.*

Definice 4. Řekneme, že funkční řada (2.1) *konverguje stejnoměrně* v intervalu I k funkci $s(x)$ na intervalu $I^{\star\star}$, jestliže $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall x \in I^{\star\star}, \forall n > n_0$ platí:

$$|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon.$$

Platí: $I^{\star\star} \subset I^{\star}$ (tj. konverguje-li řada stejnoměrně, pak konverguje i bodově, opak neplatí). K praktickému posouzení stejnoměrné konvergence nám slouží jednoduché následující kritérium.

Věta 1 (Weierstrassovo kritérium)**.** *Funkční řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ je stejnoměrně konvergentní na intervalu $I^{\star}$, jestliže existuje konvergentní číselná řada $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ pro jejíž členy platí:*

$$|f_k(x)| \leq A_k, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad x \in I^{\star\star}.$$

Poznámka. Výhodou tohoto kritéria mimo jiné je, že nepotřebujeme znát součtovou funkci $s(x)$.

2.2 Spojitost, derivování a integrování funkčních řad

V následujících větách uvedeme základní vlastnosti stejnoměrně konvergentních řad, které nám především umožní tyto nekonečné funkční řady derivovat, resp. integrovat člen po členu.

Věta 2 (Spojitost funkční řady)**.** *Nechť funkce $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$ jsou spojité v intervalu I a nechť funkční řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ stejnoměrně konverguje k funkci $s(x)$ v tomto intervalu. Pak funkce $s(x)$ je také spojitá v intervalu I.*

Věta 3 (Derivace funkční řady)**.** *Nechť funkce $f_k(x)$, $f_k'(x)$, $k = 1, 2, \ldots$ jsou spojité na intervalu I. Nechť funkční řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje k funkci $s(x)$ v intervalu I a nechť derivací $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$ konverguje v tomto intervalu stejnoměrně. Pak má $s(x)$ v I derivaci a platí*

$$s(x)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x), \quad x \in I,$$

tj.

$$\Big(f_1(x) + f_2(x) + \cdots\Big)' = f_1'(x) + f_2'(x) + \cdots, \quad x \in I.$$

Věta 4 (Integrace funkční řady)**.** *Nechť funkce $f_k(x), k = 1, 2, \ldots$ jsou integrovatelné v intervalu $\langle a, b\rangle$. Nechť funkční řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ stejnoměrně konverguje k funkci $s(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak funkce $s(x)$ je také integrovatelná v $\langle a, b\rangle$ a platí*

$$\int\limits_a^b s(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int\limits_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x \right),$$

tj.

$$\int\limits_a^b \Big(f_1(x) + f_2(x) + \cdots\Big)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x + \cdots .$$

3 Mocninné řady

Mocninné řady[3] jsou nejjednodušším speciálním případem funkčních řad. Jsou to funkční řady, jejichž členy jsou mocninné funkce. V této kapitole se zaměříme na základní pojmy, obor konvergence a vlastnosti mocninných řad jako jsou spojitost, derivování a integrování. Uvidíme, že oborem konvergence každé mocninné řady je jednobodová množina nebo interval. Dále rovněž ukážeme, že tyto řady konvergují stejnoměrně na každém uzavřeném podintervalu tohoto konvergenčního intervalu. Jak plyne z předchozí kapitoly, tato vlastnost nám umožní integrovat a derivovat mocninné řady člen po členu.

3.1 Definice a základní pojmy, obor konvergence

Definice 5. *Mocninnou řadou se středem v bodě* x_0 rozumíme funkční řadu tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots , \tag{3.1}$$

kde a_k pro $k = 0, 1, 2, \ldots$ jsou konstanty, které nazýváme *koeficienty řady.*

Mocninná řada se středem v bodě $x_0 = 0$ je tedy funkční řada tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots . \tag{3.2}$$

Částečnými součty každé mocninné řady jsou polynomy a proto lze očekávat, že tyto řady budou mít jisté jednoduché vlastnosti.

Především je zřejmé, že každá mocninná řada konverguje ve svém středu $x_0 \in I$, což lze velmi snadno ověřit přímým dosazením do řady. Následující věta ukáže, že struktura oboru konvergence mocninných řad je buď jednoprvková množina tvořena středem řady nebo interval konečné délky symetrický kolem středu nebo celá reálná osa.

V koncových bodech oboru konvergence může řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ konvergovat, případně divergovat nebo oscilovat. Tyto případy musíme vždy prověřit zvlášť.

Věta 5 (O poloměru konvergence)**.** *Ke každé mocninné řadě $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ existuje takové číslo $R \geq 0$ (připouštíme i $R = \infty$), že pro všechna $x \in \langle x_0 - R, x_0 + R\rangle$ tato řada absolutně konverguje, kdežto pro x ležící vně intervalu $\langle x_0 - R, x_0 + R\rangle$ nekonverguje. (Zápisem $R = 0$ přitom rozumíme, že řada konverguje pouze pro $x = x_0$ a hodnota $R = \infty$ znamená, že řada konverguje pro všechna reálná x). Číslo R pak nazýváme poloměrem konvergence.*

V následující větě uvedeme kritérium, pomocí kterého lze zjistit hodnotu poloměru konvergence R. Formálně se toto kritérium podobá limitnímu podílovému a odmocninovému kritériu, a to z důvodu, že je pomocí nich dokazováno.

Věta 6 (Určení poloměru konvergence)**.** *Nechť existuje (konečná nebo nekonečná) limita*

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \varrho, \quad \text{resp.} \quad \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \varrho.$$

[3] Text převzatý z [1].

Potom pro konvergenční poloměr mocninné řady (3.1) *platí*

$$R = \frac{1}{\varrho}.$$

Přitom pro $\varrho = 0$ *klademe* $R = \infty$ *a pro* $\varrho = \infty$ *klademe* $R = 0$.

Poznámka. Pokud jde o vzájemný vztah obou limit uvažovaných v předcházející větě, připomeňme, že platí: Existuje-li $\lim_{k\to\infty} |a_{k+1}/a_k|$, potom existuje také $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ a obě limity jsou si rovny. Uvedené vzorce lze však použít pouze v případě, že mocniny v řadě „skáčou" po jedné.

■ **Příklad 3.1.** Určete obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{k\,3^k} = \frac{x-1}{3} + \frac{(x-1)^2}{18} + \frac{(x-1)^3}{81} + \cdots .$$

Řešení. Mocninná řada má střed v bodě $x_0 = 1$ a koeficienty $a_k = 1/(k\,3^k)$. Dále určíme poloměr konvergence:

$$\varrho = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|k\,3^k|}} = \frac{1}{3} \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}} = \frac{1}{3},$$

$R = \frac{1}{\varrho} = 3$. Daná mocninná řada teda konverguje uvnitř intervalu $(-2, 4)$. O konvergenci v krajních bodech rozhodneme dosazením do řady. Pro $x = 4$ získáme řadu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, což je divergentní harmonická řada. Pro $x = -2$ dostáváme konvergentní *Leibnitzovu* řadu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$. Oborem konvergence $I^\star$ je tedy interval $I^\star = \langle -2, 4)$.

3.2 Spojitost, derivování a integrování mocninných řad

Věta 7 (O stejnoměrné konvergenci)**.** *Má-li řada* (3.1) *poloměr konvergence* $R > 0$*, potom konverguje stejnoměrně (navíc i absolutně) v každém uzavřeném intervalu* $\langle x_0 - R^\star, x_0 + {}$ ${}+R^\star\rangle \subset (x_0 - R,\ x_0 + R)$.

Podle poslední věty mocninné řady stejnoměrně konvergují na každém uzavřeném intervalu ležícím uvnitř oboru konvergence.

Z předcházející věty pak plynou následující základní vlastnosti mocninných řad.

Věta 8 (O spojitosti mocninných řad)**.** *Mocninná řada* $s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ *je spojitou funkcí v každém vnitřním bodě oboru konvergence* $I^\star$*. Konverguje-li navíc tato řada v levém (resp. pravém) krajním bodě* $I^\star$*, pak je* $s(x)$ *spojitá v tomto bodě zprava (resp. zleva).*

■ **Příklad 3.2.** Funkce $s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{k 3^k}$ z předcházejícího příkladu je spojitá na intervalu $(-2, 4)$ a spojitá zprava v bodě $x = -2$.

Věta 9 (O derivování mocninných řad)**.** *Nechť mocninná řada* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ *má poloměr konvergence* $R > 0$ *a součet* $s(x)$*. Pak platí*

$$s'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1},$$

tj.

$$\Big(a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots\Big)' = 0 + a_1 + 2a_2(x-x_0) + \cdots ,$$

přičemž mocninná řada na pravé straně má tentýž poloměr konvergence R*.*

Věta 10 (O integrování mocninných řad)**.** *Nechť mocninná řada* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ *má poloměr konvergence* $R > 0$ *a součet* $s(x)$*. Pak platí*

$$\int_a^b s(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k\frac{(b-x_0)^{k+1}}{k+1} - a_k\frac{(a-x_0)^{k+1}}{k+1}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k+1}(b-x_0)^{k+1} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k+1}(a-x_0)^{k+1},$$

tj.

$$\int_a^b \Big(a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots\Big)\,\mathrm{d}x = a_0[x]_a^b + \frac{a_1}{2}\Big[(x-x_0)^2\Big]_a^b + \frac{a_2}{3}\Big[(x-x_0)^3\Big]_a^b + \cdots$$

pro libovolný interval $\langle a, b\rangle \subset (x_0-R, x_0+R)$*, přičemž číselná řada na pravé straně konverguje, a to absolutně.*

Poznámka. Větu o integraci mocninné řady lze přeformulovat také pro případ, kdy uvažovaný integrál je funkcí horní meze pro všechna $x \in (x_0-R, x_0+R)$. Pak platí

$$\int_{x_0}^{x}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k(t-x_0)^k\right)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{x_0}^{x} a_k(t-x_0)^k\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\frac{(x-x_0)^k+1}{k+1},$$

tj.

$$\int_{x_0}^{x}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k(t-x_0)^k\right)\mathrm{d}t = a_0(x-x_0) + \frac{a_1}{2}(x-x_0)^2 + \frac{a_2}{3}(x-x_0)^3 + \cdots ,$$

přičemž mocninná řada na pravé straně má opět poloměr konvergence R.

Pomocí derivování nebo integrování mocninných řad člen po členu lze odvodit některé nové vztahy pro součty řad. Vyjděme například ze vztahu

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad x \in I^\star = (-1, 1).$$

Všimněme si, že se jedná o geometrickou funkční řadu s kvocientem $q = x$, tudíž pro součet této řady platí uvedený vztah. Obor konvergence bychom zjistili např. pomocí limitního podílového kritéria.

Derivováním této rovnosti dostáváme podle věty o derivaci mocninných řad

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \text{tj.} \quad \sum_{k=1}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad x \in (-1, 1).$$

Zdůrazněme, že při derivování a integrování mocninné řady se zachovává poloměr konvergence, nikoliv však nutně konvergence v krajních bodech oboru konvergence. Případnou konvergenci je třeba vždy prověřit přímým dosazením do řady.

Pozastavme se nad tím, že řada vystupující v předcházejícím vztahu již není řada geometrická. Dosazením libovolného $x \in (-1, 1)$ do tohoto vztahu lze získat vzorec pro součet negeometrické řady.

Integrováním rovnosti $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ dostáváme po malé úpravě a prověření konvergence v krajních bodech vztah

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x), \quad x \in \langle -1, 1).$$

4 Taylorovy řady

Rozvojem funkce do mocninné řady rozumíme nalezení mocninné řady, jejíž součtem je právě daná funkce. Tato mocninná řada se pak nazývá Taylorova. Pro většinu elementárních funkcí umíme nalézt její rozvoj do mocninné řady, a to buď pomocí vzorce, nebo užitím jiných obratů. Tyto vzorce se využívají především v tom smyslu, že řadu operací (vyčíslení funkční hodnoty, limity, derivace, integrálu) lze provést snadněji pro tyto rozvoje, než pro funkce samotné.

Z důvodu obsáhlosti této podkapitoly a malého prostoru k popisu teorie se na toto téma jen velmi stručně zaměříme a dále si uvedeme některé Taylorovy rozvoje elementárních funkcí. Rozsáhlejší text věnovaný Taylorovým řadám můžete najít například v [1].

4.1 Základní pojmy

Definice 6. Nechť funkce $f(x)$ má v bodě x_0 derivace všech řádů. Potom *Taylorovou řadou* funkce $f(x)$ v bodě x_0 nazýváme výraz

$$T_f^{x_0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k. \tag{4.1}$$

Hlavní otázkou nyní je, za jakých podmínek platí

$$f(x) = T_f^{x_0}(x).$$

Protože n-tý částečný součet Taylorovy řady je Taylorův polynom $P_n(x)$, platí *Taylorova věta*, která říká, že každou n-krát spojitě diferencovatelnou funkci $f(x)$ můžeme v okolí bodu x_0 $U(x_0)$ nahradit Taylorovým polynomem $P_n(x)$ se zbytkem $R_n(x)$, takže je

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \quad \forall x \in U(x_0),$$

kde

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Odtud lze odvodit následující ekvivalentní podmínku pro to, aby Taylorova řada funkce $f(x)$ byla skutečně rovna $f(x)$,což popisuje následující věta.

Věta 11. *Nechť funkce $f(x)$ má v intervalu I derivace všech řádů a nechť $x_0 \in I$ je vnitřním bodem I. Potom v tomto intervalu platí*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \quad \forall x \in I. \tag{4.2}$$

K praktickém použití předcházející věty je nejjednodušší využít odhadu *Taylorova zbytku* ve tvaru

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(x - x_0)^n, \quad M_{n+1} = \sup_{x\in I} \left| f^{(n+1)}(x) \right|.$$

Poznámka. K praktickému ověření vztahu (4.2) se také používá *Lagrangeův tvar zbytku* $R_n(x)$ ve tvaru

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + (x-x_0)\vartheta),$$

kde ϑ je blíže neurčené číslo, přičemž $0 < \vartheta < 1$.

4.2 Přehled vybraných Taylorových rozvojů elementárních funkcí

4.2.1 Taylorovy rozvoje elementárních funkcí určené přímou metodou

Využívají k výpočtu koeficientu a_k pomocí vztahu $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \quad x \in (-\infty, \infty),\\
\sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots, \quad x \in (-\infty, \infty),\\
\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots, \quad x \in (-\infty, \infty),\\
\ln(1+x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, \quad x \in (-1, 1\rangle.
\end{aligned}$$

4.2.2 Taylorovy rozvoje elementárních funkcí určené nepřímou metodou

Rozvoj funkce $f(x)$ se určuje pomocí rozvoje $f'(x)$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{arctg} x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, \quad x \in \langle -1, 1\rangle,\\
\sinh x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots, \quad x \in (-\infty, \infty),\\
\cosh x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} + \cdots, \quad x \in (-\infty, \infty),\\
\operatorname{arctgh} x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots, \quad x \in (-1, 1).
\end{aligned}$$

Přehled dalších důležitých Taylorových rozvojů je uveden i s praktickým použitím v literatuře [6].

5 Fourierovy řady

Jedná se o speciální a složitější případ funkčních řad, kdy chceme funkci f rozvinout do trigonometrické řady, tj. do řad sinů a kosinů. Nejprve rozebereme vztah koeficientů trigonometrické řady s touto funkcí. Dále se budeme zabývat podmínkami zaručujícími stejnoměrnou konvergenci. V poslední části se stručně zaměříme na využití Fourierových řad.

Je nutné podotknout, že se v dalších úvahách omezíme na periodické funkce s periodou 2π, případně funkce definované na intervalu délky 2π, tj. na intervalu $\langle c, c+2\pi\rangle$ a na závěr kapitoly ukážeme zobecnění pro případ funkcí s libovolnou peridou.

Podrobněji je tato kapitola popsána zejména v monografiích [3], [5], kde jsou také zmíněny důkazy všech uvedených vět.

5.1 Základní pojmy

Definice 7. *Trigonometrickou řadou* rozumíme nekonečnou funkční řadu

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\cdots, \tag{5.1}$$

kde a_k, b_k jsou konstanty. Pak n-tý částečný součet této řady

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+\cdots+a_n\cos nx+b_n\sin nx, \tag{5.2}$$

se nazývá *trigonometrický polynom* stupně n.

Definice 8. Lze-li funkci $f(x)$ vyjádřit danou trigonometrickou řadou, tedy platí

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx), \tag{5.3}$$

kde a_k, b_k jsou konstanty závisející na funkci $f(x)$, říkáme, že jsme funkci $f(x)$ rozvinuli v trigonometrickou řadu.

Zásadní vlastností při výpočtu konstant a_k, b_k je ortogonalita (kolmost) systému funkcí $\{\cos kx, \sin kx\}$. Zaveďme proto následující pomocné pojmy.[4]

Definice 9. Řekneme, že funkce $f(x)$ je *integrovatelná s kvadrátem (kvadraticky integrovatelná)*, jestliže existují konečné hodnoty integrálů

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{a} \quad \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tuto vlastnost má každá spojitá, případně po částech spojitá funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$.

[4] Zavedené pojmy jsou převzaté z [1], [6].

Definice 10. Nechť $f(x)$, $g(x)$ jsou funkce integrovatelné s kvadrátem v $\langle a, b\rangle$, pak výraz

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

nazýváme *skalárním součinem* funkcí $f(x)$ a $g(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$. Je-li uvedená hodnota skalárního součinu

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

pak funkce $f(x)$, $g(x)$ nazveme *ortogonální* v $\langle a, b\rangle$.

Definice 11. Nechť je dán konečný (nekonečný) systém funkcí $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots,$ které jsou v $\langle a, b\rangle$ integrovatelné s kvadrátem. Říkáme, že tyto funkce tvoří v intervalu $\langle a, b\rangle$ *ortogonální systém*, jestliže každé dvě různé funkce tohoto systému jsou ortogonální, tj. platí

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad i \neq j,$$

obvykle přitom předpokládáme

$$\|\varphi_i\|^2 = \int_a^b \varphi_i^2(x)\,\mathrm{d}x \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots,$$

tj. do ortogonálního systému nezahrnujeme funkce nulové nebo skoro všude nulové.

Definice 12. Nechť funkce f je integrovatelná s kvadrátem. Nezáporné číslo

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}$$

nazýváme *normou funkce* f na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Definice 13. *Vzdáleností* dvou funkcí $f(x)$, $g(x)$ rozumíme normu funkce $f(x) - g(x)$, tj.

$$\|f - g\| = \sqrt{\int_a^b |f(x) - g(x)|^2\,\mathrm{d}x}. \tag{5.4}$$

Poznámka. Pro vzdálenost $\|f - g\|$ se v literatuře vzhledem ke tvaru výrazu (5.4) často používá termínu *střední kvadratická odchylka*.

Věta 12. *(Nekonečný) trigonometrický systém funkcí*

$$\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx\}$$

je ortogonální v libovolném intervalu délky 2π, tj. v intervalu $\langle c, c + 2\pi\rangle$.

Ortogonalitu tohoto systému dokážeme ověřením příslušných uvedených vzorců, tj. pro každé dvě různé funkce $f(x)$, $g(x)$ z tohoto systému musí platit $\int_c^{c+2\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, kde c je libovolné reálné číslo. Snadno lze spočítat, že

$$\|1\| = \sqrt{2\pi}, \quad \|\cos kx\| = \sqrt{\pi}, \quad \|\sin kx\| = \sqrt{\pi}.$$

Dvojnásobek (a tedy i určitá symetrie) u funkce $\varphi_0(x) = 1$ je důvodem, proč ve vztahu (5.1) vystupuje nultý člen ve tvaru $\frac{a_0}{2}$.

V dalším odstavci si uvedeme princip rozvoje funkcí do Fourierových řad.

Předpokládejme, že funkci $f(x)$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci (nekonečného) ortogonálního systému $\{\varphi_k\}$ na nějakém intervalu $\langle a, b\rangle$, tj. $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(x)$. Násobme nyní rovnost funkcí φ_m a integrujme na intervalu $\langle a, b\rangle$, tj.

$$\int_a^b f(x)\varphi_m(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(x)\varphi_m(x)\right)\mathrm{d}x.$$

Dále předpokládejme, že řada $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(x)$ konverguje stejnoměrně k $f(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$. Z tohoto důvodu je možné zaměnit znak sumace s integrací, tj.

$$\int_a^b f(x)\varphi_m(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b c_k\varphi_k(x)\varphi_m(x)\,\mathrm{d}x.$$

Protože funkce φ_k jsou ortogonální, dostáváme

$$\int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,\mathrm{d}x = c_k\int_a^b \varphi_k^2(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow c_k = \frac{1}{\|\varphi_k\|^2}\int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

Koeficienty c_k se nazývají *Fourierovy koeficienty*.

Na základě ortogonality trigonometrického systému funkcí v libovolném intervalu 2π a uvedeného principu lze odvodit následující větu, podle které se určí hodnoty koeficientů a_k, b_k ve vyjádření (5.3).

Věta 13 (Určení koeficientů a_k, b_k)**.** *Konverguje-li trigonometrická řada* (5.1) *stejnoměrně k integrovatelné funkci* $f(x)$ *v intervalu* $\langle c, c+2\pi\rangle$, *potom platí*

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{5.5}$$

Poznámka. Při praktickém výpočtu Fourierových koeficientů a_k, b_k je třeba vypočítat příslušné určité integrály. V řadě případů lze tyto výpočty zjednodušit. Jedná se o situaci, kdy je funkce $f(x)$ na intervalu $(-\pi, \pi)$ sudá či lichá. Nyní si tento poznatek rozvedeme:

Nechť funkce $f(x)$ je na $(-\pi, \pi)$ integrovatelná. Je-li funkce $f(x)$ na tomto intervalu

- **lichá**, tj. $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in (-\pi, \pi)$, pak $a_k = 0$ pro $k = 0, 1, 2, \ldots$ a příslušná Fourierova řada obsahuje jen sinové členy

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x, \quad k = 1, 2, \ldots$$

- **sudá**, tj. $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in (-\pi, \pi)$, pak $b_k = 0$ pro $k = 1, 2, \dots$ a příslušná Fourierova řada obsahuje jen kosinové členy

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos kx \, \mathrm{d}x, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Definice 14. Nechť funkce $f(x)$ je integrovatelná v intervalu $\langle c, c+2\pi\rangle$. Pak trigonometrickou řadu

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \,, \tag{5.6}$$

kde koeficienty a_k, b_k jsou vyjádřeny vztahy (5.5), nazýváme *Fourierovou řadou* funkce $f(x)$ v intervalu $\langle c, c+2\pi\rangle$ a značíme ji symbolem Φ_f.

Vyvstává otázka, zda platí

$$f(x) = \Phi_f(x), \quad x \in \langle c, c+2\pi\rangle.$$

Poznámka. Připomeňme, že vzorce pro Fourierovy koeficienty a_k, b_k byly odvozeny za předpokladu stejnoměrné konvergence Fourierovy řady. Dosud jsme však neukázali, zda uvedená řada vůbec konverguje (příp. jaký je její součet). Tímto problémem se budeme zabývat v následujícím oddílu.

5.2 Bodová a stejnoměrná konvergence Fourierovy řady

Věta 14. *Nechť funkce $f(x)$ je kvadraticky integrovatelná na intervalu $\langle c, c+2\pi\rangle$ a označme $S_n(x)$ libovolný n-tý částečný součet trigonometrické řady (5.1) a $S_n^\star(x)$ n-tý částečný součet Fourierovy řady (tj. trigonometrické řady, kde a_k, b_k jsou odpovídající Fourierovy koeficienty), pak platí*

$$\min_{S_n(x)} \|S_n(x) - f(x)\| = \|S_n^\star(x) - f(x)\|. \tag{5.7}$$

Vztah (5.7) nám vyjadřuje skutečnost, že ze všech n-tých částečných součtů dané trigonometrické řady aproximuje funkci $f(x)$ nejlépe ten částečný součet, jehož koeficenty a_k, b_k jsou Fourierovy koeficienty.

Věta 15 (Parsevalova rovnost)**.** *Nechť a_k, b_k jsou Fourierovy koeficienty kvadraticky integrovatelné funkce $f(x)$ na intervalu $\langle c, c+2\pi\rangle$, pak platí tzv. Parsevalova rovnost*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right) = \frac{1}{\pi} \int_{c}^{c+2\pi} f^2(x) \, \mathrm{d}x. \tag{5.8}$$

Uvedená věta ještě nezaručuje požadovanou rovnost funkce $f(x)$ a její Fourierovy řady (a už vůbec nezaručuje stejnoměrnou konvergenci této řady).

Věta 16 (Dirichletova)**.** *Nechť $f(x)$ je periodická fce s periodou 2π, tj. $f(x+2\pi) = f(x)$ pro všechna $x \in (-\infty, \infty)$ a nechť $f(x)$ je v intervalu $\langle c, c+2\pi\rangle$ po částech spojitou derivaci. Pak její Fourierova řada Φ_f konverguje v každém bodě $x \in (-\infty, \infty)$ k aritmetickému průměru limity zprava a limity zleva funkce $f(x)$, takže platí:*

1. $\Phi_f(x) = f(x)$ *v každém bodě $x \in (-\infty, \infty)$, v němž je $f(x)$ spojitá*
2. $\Phi_f(x^*) = \frac{1}{2}[\lim_{x\to x^*_+} f(x) + \lim_{x\to x^*_-} f(x)]$ *v každém bodě $x^* \in (-\infty, \infty)$, v němž je $f(x)$ nespojitá.*

Poznámka. Funkci nazveme po částech spojitou na intervalu $\langle c, c+2\pi\rangle$, je-li zde spojitá s případnou výjimkou počtu bodů nespojitosti prvního druhu (tj. existují zde konečné, ale různé jednostranné limity).

Poznámka. V případě neperiodické fce $f(x)$ v intervalu $\langle c, c+2\pi\rangle$ platí závěry Dirichletovy věty pouze na intervalu $(c, c+2\pi)$, místo původního intervalu $(-\infty, \infty)$. Tvrzení Dirichletovy věty se pak navíc rozšíří v krajních bodech tohoto intervalu, tj. platí:

1. $\Phi_f(x) = f(x)$ v každém bodě $x \in (c, c+2\pi)$, v němž je $f(x)$ spojitá
2. $\Phi_f(x^*) = \frac{1}{2}[\lim_{x\to x^*_+} f(x) + \lim_{x\to x^*_-} f(x)]$ v každém bodě $x^* \in (c, c+2\pi)$, v němž je $f(x)$ nespojitá.
3. $\Phi_f(c) = \Phi_f(c+2\pi) = \frac{1}{2}[\lim_{x\to c_+} f(x) + \lim_{x\to c+2\pi_-} f(x)]$

Věta 17 (Jordanova o stejnoměrné konvergenci)**.** *Nechť funkce $f(x)$ je periodická s periodou 2π, spojitá na intervalu $\langle c, c+2\pi\rangle$ a má po částech spojitou derivaci. Pak Fourierova řada Φ_f k funkci $f(x)$ konverguje stejnoměrně a to pro všechna $x \in (-\infty, \infty)$. Speciálně tedy platí*

$$\Phi_f = f(x), \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Poznámka. Není-li funkce $f(x)$ periodická, avšak splňuje ostatní dva předpoklady předcházející věty, pak závěry Jordanovy věty platí na libovolném uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle \subset$ $\subset (c,\ c+2\pi)$. Je-li navíc $f(c) = f(c+2\pi)$, pak stejnoměrná konvergence Φ_f k funkci $f(x)$ platí přímo na celém intervalu $\langle c, c+2\pi\rangle$.

5.3 Derivování a integrování Fourierových řad

Mějme Fourierovu řadu

$$\Phi_f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$$\left[a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \,\mathrm{d}x, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \,\mathrm{d}x \right]$$

příslušnou k funkci $f(x)$.

Věta 18 (Derivování Fourierových řad)**.** *Je-li $f(x)$ spojitá v $\langle -\pi, \pi \rangle$, $f(-\pi) = f(\pi)$ a $f'(x)$ je po částech spojitá v $\langle -\pi, \pi \rangle$, pak v každém bodě, kde $f'(x)$ má derivaci (a je tedy spojitá), platí*

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k\left(-a_k \sin kx + b_k \cos kx\right).$$

Věta 19 (Integrování Fourierových řad)**.** *Je-li $f(x)$ po částech spojitá v $\langle -\pi, \pi \rangle$, pak platí*

$$\int\limits_{-\pi}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{a_0}{2}(x+\pi) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left[a_k \sin kx - b_k\left(\cos kx - \cos k\pi\right)\right], \quad (-\pi \le x \le \pi).$$

5.4 Fourierovy řady v obecném případě

Je-li $f(x)$ periodická funkce s obecnou periodou $2l$, případně neperiodická funkce definovaná na intervalu $\langle c, c{+}2l \rangle$, pak se všechny předcházející definice, věty, vztahy a poznámky snadno modifikují na tento případ. Např. nekonečný systém funkcí

$$\left\{1, \sin\frac{\pi x}{l}, \cos\frac{\pi x}{l}, \dots, \sin\frac{n\pi x}{l}, \cos\frac{n\pi x}{l}\right\}$$

je ortogonální na libovolném intervalu $\langle c, c+2\pi \rangle$. Odpovídající Fourierova řada má tvar

$$f(x) \sim \Phi_f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}\right), \tag{5.9}$$

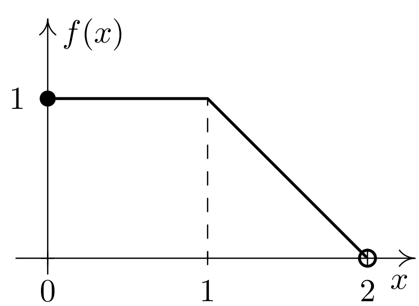
kde funkce $f(x)$ je integrovatelná na intervalu $\langle c, c+2l \rangle$. Pro příslušné Fourierovy koeficienty platí

$$a_k = \frac{1}{l}\int\limits_{c}^{c+2l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,\mathrm{d}x, \quad b_k = \frac{1}{l}\int\limits_{c}^{c+2l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,\mathrm{d}x, \quad k = 0, 1, 2, \dots. \tag{5.10}$$

5.5 Řešené příklady

■ **Příklad 5.1.** Rozviňte následující funkci $f(x)$ ve Fourierovu řadu.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \langle 0, 1), \\ 2 - x, & x \in \langle 1, 2). \end{cases}$$



Obrázek 5.1: Graf funkce $f(x)$

Řešení. V tomto případě máme obecnou periodu $2l = 2 \Rightarrow l = 1$.

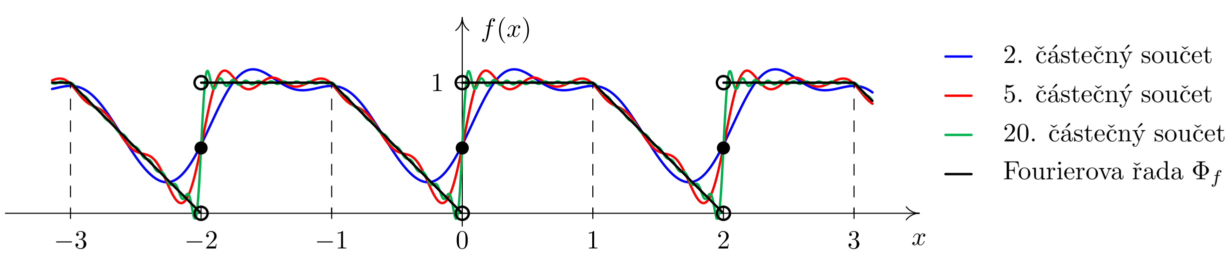
$$a_0 = \frac{1}{1}\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 1\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (2-x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{1}\int_0^2 f(x)\cos\frac{k\pi x}{1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \cos k\pi x\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (2-x)\cos k\pi x\,\mathrm{d}x = \\
&= \left| \begin{array}{cc} u = 2-x & v' = \cos k\pi x \\ u' = -1 & v = \frac{\sin k\pi x}{k\pi} \end{array} \right| = \left[\frac{1}{k\pi}\sin k\pi x\right]_0^1 + \left[(2-x)\frac{\sin k\pi x}{k\pi}\right]_1^2 + \\
&+ \frac{1}{k\pi}\int_1^2 \sin k\pi x\,\mathrm{d}x = 0 + 0 + \frac{1}{k\pi}\left[-\frac{\cos k\pi x}{k\pi}\right]_1^2 = \frac{1}{k^2\pi^2}(-1+\cos k\pi) = \\
&= \frac{1}{k^2\pi^2}\left[-1+(-1)^k\right] = \begin{cases} 0, & \text{pro } k \text{ sudé,} \\ -\frac{2}{k^2\pi^2}, & \text{pro } k \text{ liché.} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{1}\int_0^2 f(x)\sin\frac{k\pi x}{1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sin k\pi x\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (2-x)\sin k\pi x\,\mathrm{d}x = \\
&= \left| \begin{array}{cc} u = 2-x & v' = \sin k\pi x \\ u' = -1 & v = -\frac{\cos k\pi x}{k\pi} \end{array} \right| = \left[-\frac{1}{k\pi}\cos k\pi x\right]_0^1 + \left[-(2-x)\frac{\cos k\pi x}{k\pi}\right]_1^2 - \\
&- \frac{1}{k\pi}\int_1^2 \cos k\pi x\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos k\pi x}{k\pi} + \frac{1}{k\pi} + \frac{\cos k\pi x}{k\pi} - \frac{1}{k\pi}\left[\frac{\sin k\pi x}{k\pi}\right]_1^2 = \frac{1}{k\pi} - 0 = \frac{1}{k\pi}.
\end{aligned}$$

Pro výslednou Fourierovu řadu dostáváme vztah:

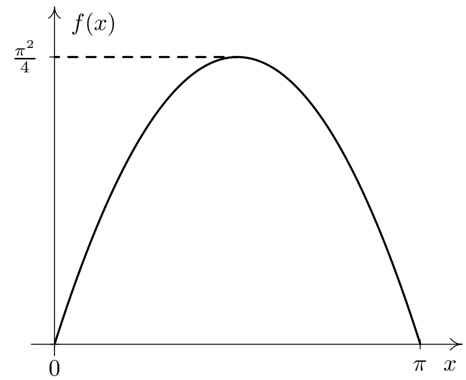
$$\begin{aligned}
\Phi_f &= \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2\pi^2}\left[-1+(-1)^k\right]\cos k\pi x + \frac{1}{k\pi}\sin k\pi x\right) = \\
&= \frac{3}{4} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{(2k+1)^2\pi^2}\cos(2k+1)\pi x + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\pi}\sin k\pi x.
\end{aligned}$$



Obrázek 5.2: Graf vybraných částečných součtů a Fourierovy řady Φ_f funkce $f(x)$ zadané v příkladu 5.1

■ **Příklad 5.2.** Rozviňte v sinovou a kosinovou řadu funkci $f(x)$, která je dána vztahem:

$$f(x) = x(\pi - x), \quad x \in (0, \pi).$$



Obrázek 5.3: Graf funkce $f(x)$

Řešení.

Sinový rozvoj: $a_k = 0$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin kx \,\mathrm{d}x = 2\int_0^\pi x\sin kx\,\mathrm{d}x - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 \sin kx\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = x & v' = \sin kx \\ u' = 1 & v = -\frac{\cos kx}{k} \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{ll} u = x^2 & v' = \sin kx \\ u' = 2x & v = -\frac{\cos kx}{k} \end{array} \right| = 2\left\{ \left[-\frac{x\cos kx}{k} \right]_0^\pi + \frac{1}{k}\int_0^\pi \cos kx\,\mathrm{d}x \right\} - \frac{2}{\pi}\left\{ \left[-\frac{x^2\cos kx}{k} \right]_0^\pi + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{k}\int_0^\pi x\cos kx\,\mathrm{d}x \right\} = \left| \begin{array}{ll} u = x & v' = \cos kx \\ u' = 1 & v = \frac{\sin kx}{k} \end{array} \right| = -\frac{2\pi(-1)^k}{k} + 2\left[\frac{\sin kx}{k^2} \right]_0^\pi +$$

$$+ \frac{2\pi(-1)^k}{k} - \frac{4}{k\pi}\left\{ \left[\frac{x\sin kx}{k} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin kx}{k}\,\mathrm{d}x \right\} = \frac{4}{k^2\pi}\left\{ \left[-\frac{\cos kx}{k} \right]_0^\pi \right\} =$$

$$= \frac{4}{k^3\pi}\left(1 - (-1)^k\right) = \begin{cases} 0, & \text{pro } k \text{ sudé}, \\ \frac{8}{k^3\pi}, & \text{pro } k \text{ liché}. \end{cases}$$

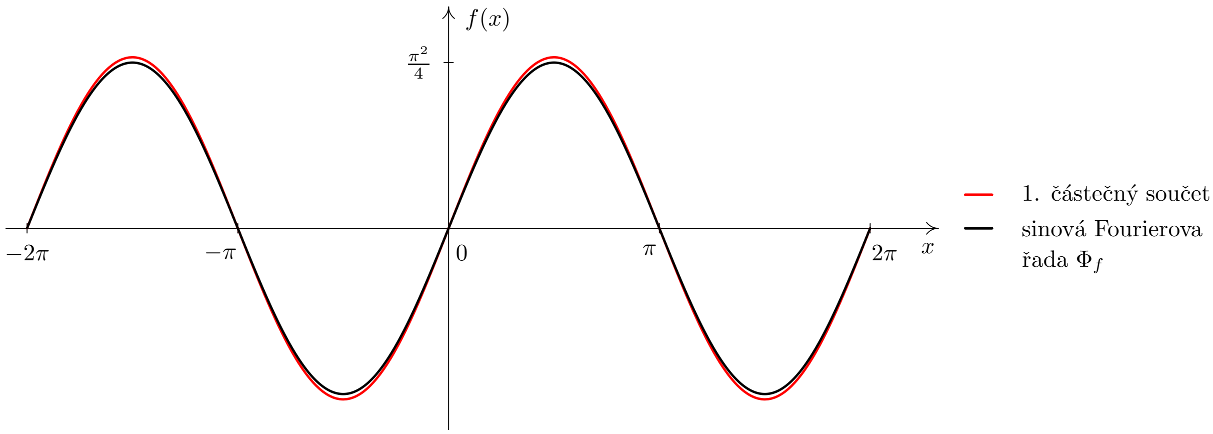
.

Po dosazení do vztahu (5.6) dostáváme výslednou sinovou Fourierovu řadu ve tvaru:

$$\Phi_f = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin{(2k-1)x}}{(2k-1)^3}.$$

Kosinový rozvoj: $b_k = 0$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi x - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{3},$$



Obrázek 5.4: Graf 1. částečného součtu a sinové Fourierovy řady Φ_f funkce $f(x) = x(\pi - x)$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x = 2\int_0^\pi x\cos kx\,\mathrm{d}x - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos kx\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = x & v' = \cos kx \\ u' = 1 & v = \frac{\sin kx}{k} \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{ll} u = x^2 & v' = \cos kx \\ u' = 2x & v = \frac{\sin kx}{k} \end{array} \right| = 2\left\{\left[\frac{x\sin kx}{k}\right]_0^\pi - \frac{1}{k}\int_0^\pi \sin kx\,\mathrm{d}x\right\} - \frac{2}{\pi}\left\{\left[\frac{x^2\sin kx}{k}\right]_0^\pi -\right.$$

$$\left. - \frac{2}{k}\int_0^\pi x\sin kx\,\mathrm{d}x\right\} = \left| \begin{array}{ll} u = x & v' = \sin kx \\ u' = 1 & v = -\frac{\cos kx}{k} \end{array} \right| = \frac{2}{k}\left[\frac{\cos kx}{k}\right]_0^\pi + \frac{4}{\pi k}\left\{\left[\frac{-x\cos kx}{k}\right]_0^\pi -\right.$$

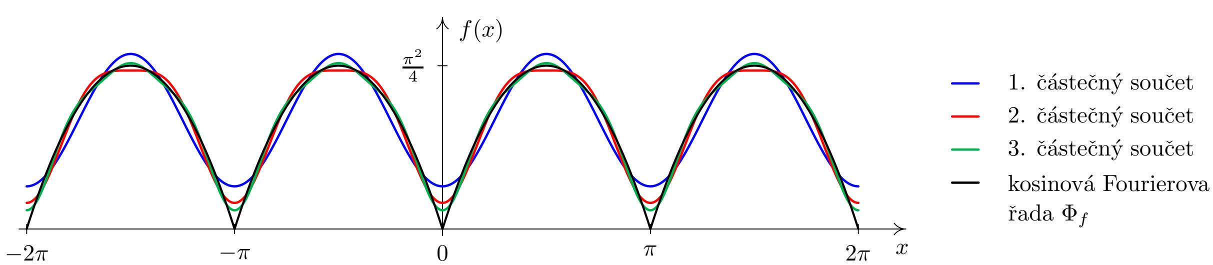
$$\left. - \int_0^\pi \frac{\cos kx}{k}\,\mathrm{d}x\right\} = \frac{2}{k^2}\left[(-1)^k - 1\right] - \frac{4}{k^2\pi}\pi\,(-1)^k - \frac{4}{k^2\pi}\left[\frac{\sin kx}{k}\right]_0^\pi =$$

$$= \frac{2}{k^2}\left((-1)^k - 1 - 2(-1)^k\right) = \begin{cases} -\frac{4}{k^2}, & \text{pro } k \text{ sudé,} \\ 0, & \text{pro } k \text{ liché.} \end{cases}$$

.

Postupujeme obdobně jako v předchozím případě a získáváme vztah pro kosinovou Fourierovu řadu:

$$\Phi_f = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{k^2}.$$



Obrázek 5.5: Graf vybraných částečných součtů a kosinové Fourierovy řady Φ_f funkce $f(x) = x(\pi - x)$

■ **Příklad 5.3.** Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x) = \mathrm{e}^x$ na intervalu $(0, \pi)$.

Řešení. Jelikož se jedná o Fourierovu řadu v obecném případě, musíme si vyjádřit hodnotu l a to následujícím způsobem: $2l = \pi \Rightarrow l = \frac{\pi}{2}$. V dalším postupu využijeme vztahů (5.9), (5.10).

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \frac{2(\mathrm{e}^\pi - 1)}{\pi},$$

$$\begin{aligned}a_k &= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \mathrm{e}^x \cos 2kx\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = \mathrm{e}^x & v' = \cos 2kx \\ u' = \mathrm{e}^x & v = \frac{\sin kx}{2k} \end{array} \right| = \frac{2}{\pi}\left\{ \left[\frac{\mathrm{e}^x \sin 2kx}{2k}\right]_0^\pi - \right.\\ &\left. - \frac{1}{2k}\int\limits_0^\pi \mathrm{e}^x \sin 2kx\,\mathrm{d}x \right\} = \left| \begin{array}{ll} u = \mathrm{e}^x & v' = \sin 2kx \\ u' = \mathrm{e}^x & v = -\frac{\cos 2kx}{2k} \end{array} \right| = -\frac{1}{k\pi}\left\{ \left[-\frac{\mathrm{e}^x \cos 2kx}{2k}\right]_0^\pi + \right.\\ &\left. + \frac{1}{2k}\int\limits_0^\pi \mathrm{e}^x \cos 2kx\,\mathrm{d}x \right\} = \frac{1}{2k^2\pi}(\mathrm{e}^\pi - 1) - \frac{1}{2k^2\pi}\int\limits_0^\pi \mathrm{e}^x \cos 2kx\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Výraz a_k, který jsme získali dvojí aplikací per partes, použijeme v následující rovnici, kterou vyřešíme.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2k^2\pi}(\mathrm{e}^\pi - 1) - \frac{1}{2k^2\pi}\int\limits_0^\pi \mathrm{e}^x \cos 2kx\,\mathrm{d}x &= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \mathrm{e}^x \cos 2kx\,\mathrm{d}x \\ \int\limits_0^\pi \mathrm{e}^x \cos 2kx\,\mathrm{d}x \left(1 + \frac{1}{4k^2}\right) &= \frac{(\mathrm{e}^\pi - 1)}{4k^2} \\ \int\limits_0^\pi \mathrm{e}^x \cos 2kx\,\mathrm{d}x &= \frac{(\mathrm{e}^\pi - 1)}{4k^2 + 1}.\end{aligned}$$

Analogicky budeme postupovat při výpočtu druhého Fourierova koeficentu b_k.

$$\begin{aligned}b_k &= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \mathrm{e}^x \sin 2kx\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = \mathrm{e}^x & v' = \sin 2kx \\ u' = \mathrm{e}^x & v = -\frac{\cos kx}{2k} \end{array} \right| = \frac{2}{\pi}\left\{ \left[-\frac{\mathrm{e}^x \cos 2kx}{2k}\right]_0^\pi + \right.\\ &\left. + \frac{1}{2k}\int\limits_0^\pi \mathrm{e}^x \cos 2kx\,\mathrm{d}x \right\} = \left| \begin{array}{ll} u = \mathrm{e}^x & v' = \cos 2kx \\ u' = \mathrm{e}^x & v = \frac{\sin 2kx}{2k} \end{array} \right| = \frac{1 - \mathrm{e}^\pi}{k\pi} + \frac{1}{k\pi}\left\{ \left[\frac{\mathrm{e}^x \sin 2kx}{2k}\right]_0^\pi - \right.\\ &\left. - \frac{1}{2k}\int\limits_0^\pi \mathrm{e}^x \sin 2kx\,\mathrm{d}x \right\} = \frac{1 - \mathrm{e}^\pi}{k\pi} - \frac{1}{2k^2\pi}\int\limits_0^\pi \mathrm{e}^x \sin 2kx\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Opět si z rovnice vyjádříme hodnotu integrálu $\int\limits_0^\pi \mathrm{e}^x \sin 2kx\,\mathrm{d}x$.

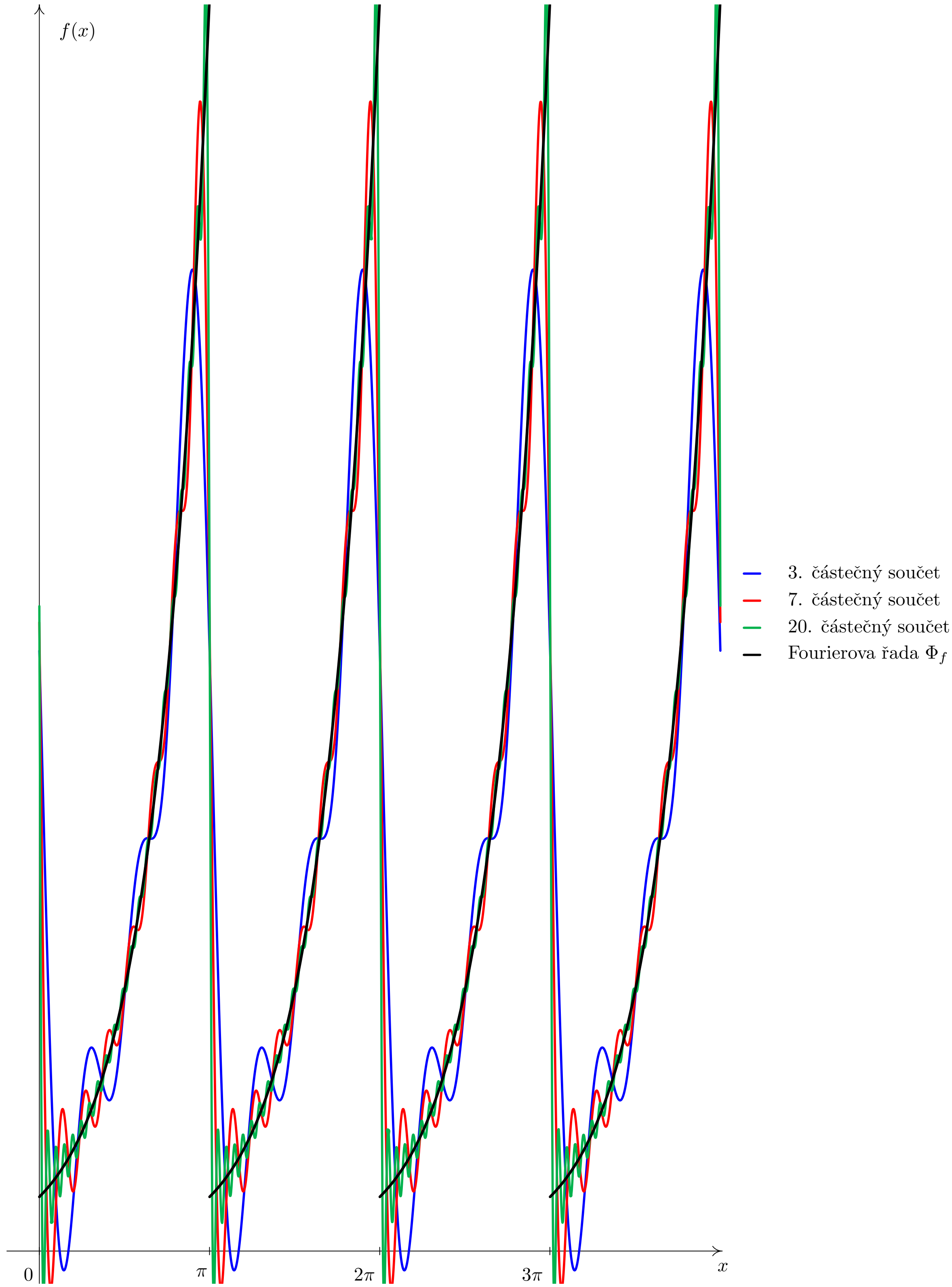
$$\begin{aligned}
\frac{1}{k\pi}\left(1-\mathrm{e}^{\pi}\right)-\frac{1}{2k^2\pi}\int\limits_0^{\pi}\mathrm{e}^x\sin 2kx\,\mathrm{d}x &= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\mathrm{e}^x\sin 2kx\,\mathrm{d}x\\
\int\limits_0^{\pi}\mathrm{e}^x\sin 2kx\,\mathrm{d}x\left(1+\frac{1}{4k^2}\right) &= \frac{\left(1-\mathrm{e}^{\pi}\right)}{2k}\\
\int\limits_0^{\pi}\mathrm{e}^x\sin 2kx\,\mathrm{d}x &= \frac{2k\left(1-\mathrm{e}^{\pi}\right)}{4k^2+1}.
\end{aligned}$$

Obdrželi jsme tedy hodnoty příslušných koeficientů a_0, a_k, b_k

$$a_0=\frac{2(\mathrm{e}^{\pi}-1)}{\pi},\qquad a_k=\frac{2}{\pi}\frac{\mathrm{e}^{\pi}-1}{4k^2+1},\qquad b_k=\frac{2}{\pi}\frac{2k\left(1-\mathrm{e}^{\pi}\right)}{4k^2+1}.$$

Výsledná Fourierova řada je tedy tvaru:

$$\Phi_f=\frac{\mathrm{e}^{\pi}-1}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{\pi}-1}{4k^2+1}\cos 2kx+\frac{2k\left(1-\mathrm{e}^{\pi}\right)}{4k^2+1}\sin 2kx\right).$$



Obrázek 5.6: Graf vybraných částečných součtů a Fourierovy řady Φ_f funkce $f(x) = \mathrm{e}^x$

5.6 Příklad aplikace Fourierových řad

V této kapitole uvedeme příklad řešení parciálních diferenciálních rovnic metodou Fourierových řad. Podstatu metody předvedeme na úloze pro hyperbolickou rovnici kmitání struny. Pro hlubší pochopení této metody a nalezení obdobných příkladů lze použít například literaturu [2], ze které bylo v našem případě čerpáno.

■ **Příklad 5.4.** Řešme úlohu kmitání struny délky π se zanedbáním vnějších sil.

$$u_{tt} = u_{xx}, \qquad x \in (0, \pi), \qquad t \in (0, \infty),$$

$$u(0,t) = 0, \qquad u(\pi, t) = 0, \qquad t \in (0, \infty),$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad u_t(x,0) = \psi(x), \qquad x \in (0, \pi).$$

Řešení. Speciální funkce $v(x,t)$, které splňující rovnici a okrajové podmínky budeme hledat ve tvaru se separovanými proměnnými, tj.

$$v(x,t) = X(x)T(t).$$

Dosazením do rovnice $u_{tt} = u_{xx}$ obdržíme $X(x)T''(t) = X''(x)T(t)$, odkud dělením XT plyne

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Levá strana rovnice nezávisí na x, pravá nezávisí na t, tudíž obě strany položíme rovny libovolné konstantě $-\lambda$. Pro $T(t)$ a $X(x)$ tak získáme obyčejné diferenciální rovnice 2. řádu. Nejprve vyřešíme rovnici

$$X'' + \lambda X = 0.$$

Řešení této rovnice obsahuje dvě konstanty

$$X(x) = c_1 \mathrm{e}^{\mu x} + c_2 \mathrm{e}^{-\mu x}.$$

Vezmeme v úvahu okrajové podmínky. Z rovnosti $T(t)X(0) = 0$ plyne $X(0) = 0$. Podobně druhá podmínka dává $X(\pi) = 0$.

Hledáme tedy nenulové řešení X rovnice $X'' + \lambda X = 0$. Dosaďme řešení X do okrajových podmínek. Z podmínky $X(0) = c_1\mathrm{e}^0 + c_2\mathrm{e}^0 = 0$ plyne $c_1 = -c_2 = c$. Dosadíme do druhé podmínky $X(\pi) = c(\mathrm{e}^{\mu\pi} - \mathrm{e}^{-\mu\pi}) = 0$, odtud plyne $\mathrm{e}^{2\mu\pi} = 1$. Rovnice $\mathrm{e}^z = 1$ má řešení $z = 2\pi k\mathrm{i}$, kde i je imaginární jednotka a k je celé číslo. Odtud vyplývá $\mu = k\mathrm{i}$ pro $k \in \mathbf{Z}$. Příslušné řešení označené indexem k je tvaru

$$X_k(x) = c(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}) = 2c\mathrm{i}\sin kx.$$

Pro jednoduchost volíme $c = 1/(2\mathrm{i})$ a dostáváme netriviální posloupnost funkcí $X_k(x) = \sin kx$ pro $k = 1, 2, 3, \ldots$ Dosazením $X_k(x)$ do rovnice $X'' + \lambda X = 0$ vyjde $\lambda_k = n^2$.

Příslušné řešení T_k vychází se dvěma konstantami

$$T_k = a_k \cos kt + b_k \sin kt.$$

Dostali jsem tak posloupnost funkcí

$$v_k(x,t) = \sin kx \left(a_k \cos kt + b_k \sin kt\right).$$

Díky principu superpozice řešení lineární úlohy každá lineární kombinace $\sum_k c_k v_k$ splňuje stejnou rovnici a okrajové podmínky. Vhodnou volbou konstant c_k můžeme splnit i počáteční podmínky. Řešení úlohy proto hledáme ve tvaru

$$u(x,t) = \sum_{k}^{\infty} c_k v_k(x,t),$$

kde c_k zahrneme v konstanty a_k, b_k, jejichž tvar získáme po dosazení počátečních podmínek, tj.

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin kx \left(a_k \cos kt + b_k \sin kt\right).$$

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx = \varphi(x), \qquad u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} k b_k \sin kx = \psi(x).$$

Koeficienty a_k, b_k určují vzorce

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin kx \,\mathrm{d}x, \qquad b_k = \frac{2}{k\pi} \int_0^{\pi} \psi(x) \sin kx \,\mathrm{d}x.$$

Při obecné délce struny l by se řešení změnilo následujícím způsobem.

$$X_k(x) = \sin \frac{k\pi}{l} x, \qquad T_k(t) = a_k \cos \frac{k\pi}{l} t + b_k \sin \frac{k\pi}{l} t.$$

Řešení rovnice bychom hledali ve tvaru

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi}{l} x \left(a_k \cos \frac{k\pi}{l} t + b_k \sin \frac{k\pi}{l} t\right),$$

s příslušnými koeficienty a_k, b_k popsány vztahy

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^{l} \varphi(x) \sin \frac{k\pi}{l} x \,\mathrm{d}x, \qquad b_k = \frac{2}{kl} \int_0^{l} \psi(x) \sin \frac{k\pi}{l} x \,\mathrm{d}x.$$

6 Závěr

Cílem této práce bylo zasvětit čtenáře do problematiky funkčních řad a dále se hlouběji věnovat řadám Fourierovým. Autorovou snahou bylo vytvořit text obsahující nejen potřebnou teorii, ale také poukázat na praktické použití Fourierových řad a to zejména při řešení obyčejných a parciálních diferenciálních rovnic.

Pro lepší orientaci a pochopení obsahu bakalářské práce jsou po čtenáři požadovány znalosti základního diferenciálního a integrálního počtu.

Funkční řady a následně řady Fourierovy jsou v textu definovány v reálném oboru. Toto omezení je z důvodu rozsahu a případné náročnosti textu. Získat a prohloubit znalosti o Fourierových řadách definovaných pro množinu komplexních čísel lze například v monografiích uvedených v seznamu použité literatury. V použité literatuře je také možné vyhledat důkazy většiny zmíněných vět, pro jejichž uvedení nebyl v této práci prostor.

Úvodní kapitola stručně popisuje nejpodstatnější momenty ze života J.-B. J. de Fourier. Kapitola druhá je věnována teorii funkčních řad a je zaměřena zejména na jejich vlastnosti. Obdobně je laděna i následující kapitola s názvem Mocninné řady. Tato část práce poukazuje především na určení poloměru konvergence a tudíž i na navazující téma stejnoměrné konvergence mocninných řad. Poslední zmíněná vlastnost nám umožňuje mocninné řady derivovat a integrovat člen po členu beze změny poloměru konvergence. Ve čtvrté kapitole je stručně zmíněno několik poznatků o Taylorových řadách a přiložen přehled vybraných Taylorových rozvojů elemenárních funkcí. Nejobsáhlejší kapitola se zabývá Fourierovými řadami. Obsahuje teoretický základ jak pro Fourierovy řady s periodou 2π, tak i pro obecný případ periody. Uvádí dále řešené příklady doplněny o grafické znázornění průběhů jednotlivých rozvíjených funkcí, výsledných Fourierových řad a náhodně vybraných částečných součtů. Poslední kapitola je snahou o ukázku řešení parciálních diferenciálních rovnic Fourierovou metodou.

Literatura

[1] ČERMÁK, J., ŽENÍŠEK, A.: *Matematika III.* 2. vyd. Brno: Vysoké učení technické, Akademické nakladatelství CERM, 2006. 205 s. ISBN 80-214-3261-6. Funkční řady; Mocninné řady; Taylorovy řady; Fourierovy řady; s. 5-64.

[2] FRANCŮ, J.: *Parciální diferenciální rovnice.* 3.vyd. Brno: Vysoké učení technické, Akademické nakladatelství CERM, 2003. 155 s. ISBN 80-214-2334-X.

[3] HARDY, G.H., ROGOSINSKI, W.W.: *Fourierovy řady.* Doc. RNDr. Alois Kufner, CSc..1. vyd. Praha: SNTL, 1962. 156 s. ISBN 04-005-71.

[4] KLUVÁNEK, I., MIŠÍK, L., ŠVEC, M.: *Matemtika II.* 1. vyd. Bratislava: SVTL, 1961. ISBN 302 03 2. Funkcionálne rady; Fourierove rady, s. 55-181.

[5] KUFNER, A., KADLEC, J.: *Fourierovy řady.* 1. vyd. Praha: Academica, 1969. 348 s. ISBN 510-21-862.

[6] REKTORYS, K., et al.: *Přehled užité matematiky.* 4. vyd. Praha: SNTL, 1981. ISBN 04-003-81. Posloupnosti a řady s proměnnými členy (Funkční posloupnosti a řady); Ortogonální systémy. Fourierovy řady. Některé speciální funkce (Besselovy funkce atd.), s. 552-605

[7] *Fourier, Jean-Baptiste Joseph de.* [online].
URL: <http://www.aldebaran.cz/famous/people/Fourier_Joseph.html>
[cit. 18. 2. 2008].

[8] *Joseph Fourier.* [online]. Poslední revize 23. 3. 2008.
URL: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Joseph_Fourier> [cit. 18. 2. 2008].

7 Seznam použitých zkratek a symbolů

LPK	limitní podílové kritérium
LOK	limitní odmocninové kritérium
$I^\star$	obor konvergence
$s_n(x)$	ve funkčních řadách n-tý částečný součet řady
$s(x)$	ve funkčních řadách součet řady
$R_n(x)$	ve funkčních a mocninných řadách zbytek řady
a_k	v mocninných řadách koeficienty mocninných řad
R	poloměr konvergence mocninných řad
$T_f^{x_0}(x)$	Taylorova řada fce $f(x)$ v bodě x_0
$R_n(x)$	v rozvojích funkcí v mocninné řady Taylorův a Lagrangeův tvar zbytku
$P_n(x)$	Taylorův polynom
Φ_f	Fourierova řada
a_k, b_k, c_k	ve Fourierových řadách Fourierovy koeficienty
$\|\|f(x)\|\|$	norma funkce $f(x)$
$\|\|f(x) - g(x)\|\|$	vzdálenost funkcí $f(x)$ a $g(x)$ (střední kvadratická odchylka)
$S_n(x)$	n-tý částečný součet trigonometrické řady
$S_n^\star(x)$	n-tý částečný součet Fourierovy řady
u_{tt}	druhá parciální derivace podle proměnné t
u_{xx}	druhá parciální derivace podle proměnné x